Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2015-2016 рік

10 клас (СР)

1. Близнюки Петрик та Остап посварилися і стали ходити з дому до школи різними шляхами. Петрик спочатку йде 210 метрів на південь, а далі 70 метрів на схід і потрапляє до школи. Остап спочатку йде певний час на північ, а далі по прямій до школи. Скільки саме метрів Остап йде на північ, якщо близнюки ходять з однаковою швидкістю і приходять до школи одночасно?

2. Є 12 стільців, розташованих в одну лінію та перенумеровані зліва направо числами $1; 2; \ldots ; 12$. Отець Федір може стрибати по цих стільцях за такими правилами: зі стільця з номером k він може стрибнути на стілець з номером n тоді і тільки тоді, коли $|k-n|=5$ або $|k-n|=8$. Відомо, що отець Федір, розпочавши з деякого стільця, зміг пострибати по них так, що побував на кожному стільці рівно 1 раз. Із стільця з яким номером отець Федір мав почати стрибати?

3. Квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ з цілими коефіцієнтами для кожного цілого значення x ділиться націло на натуральне число N. Чи обов'язково на N ділиться кожний з коефіцієнтів тричлена $f(x)$, якщо

а) $N=2016$; ***б)*** $N=2017$?

4. На колі з діаметром AB вибрали та зафіксували точку M. Після цього обирається точка Q_i, для якої хорда MQ_i перетинає AB у точці K_i і при цьому $\angle MK_iB<90°$. Хорда, яка перпендикулярна AB та проходить через точку K_i, перетинає пряму BQ_i в точці P_i. Доведіть, що точки P_i при усіх можливих виборах точки Q_i лежать на одній прямій.

5. Для додатних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a+b+c=1$, доведіть нерівність:

$$\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+c^2}+\frac{c}{c+a^2} \le \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

17 січня 2016 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Подальша інформація про олімпіаду буде наведена на сайті
www.matholymp.com.ua

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2015-2016 рік

10 клас (СР)

1. Близнюки Петрик та Остап посварилися і стали ходити з дому до школи різними шляхами. Петрик спочатку йде 210 метрів на південь, а далі 70 метрів на схід і потрапляє до школи. Остап спочатку йде певний час на північ, а далі по прямій до школи. Скільки саме метрів Остап йде на північ, якщо близнюки ходять з однаковою швидкістю і приходять до школи одночасно?

2. Є 12 стільців, розташованих в одну лінію та перенумеровані зліва направо числами $1; 2; \ldots; 12$. Отець Федір може стрибати по цих стільцях за такими правилами: зі стільця з номером k він може стрибнути на стілець з номером n тоді і тільки тоді, коли $|k-n|=5$ або $|k-n|=8$. Відомо, що отець Федір, розпочавши з деякого стільця, зміг постribати по них так, що побував на кожному стільці рівно 1 раз. Із стільця з яким номером отець Федір мав почати стрибати?

3. Квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ з цілими коефіцієнтами для кожного цілого значення x ділиться націло на натуральне число N. Чи обов’язково на N ділиться кожний з коефіцієнтів тричлена $f(x)$, якщо

а) $N=2016$; ***б)*** $N=2017$?

4. На колі з діаметром AB вибрали та зафіксували точку M. Після цього обирається точка Q_i, для якої хорда MQ_i перетинає AB у точці K_i і при цьому $\angle MK_iB<90°$. Хорда, яка перпендикулярна AB та проходить через точку K_i, перетинає пряму BQ_i в точці P_i. Доведіть, що точки P_i при усіх можливих виборах точки Q_i лежать на одній прямій.

5. Для додатних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a+b+c=1$, доведіть нерівність:

$$\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+c^2}+\frac{c}{c+a^2}\le\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

17 січня 2016 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Подальша інформація про олімпіаду буде наведена на сайті
www.matholymp.com.ua