Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2015-2016 рік

11 клас (ВР)

1. Порівняйте три числа: $A=11$, $B=\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{2015}2016$ та $C=\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_{2016}2015$.

2. Квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ з цілими коефіцієнтами для кожного цілого значення x ділиться націло на натуральне число 2017. Чи обов'язково на 2017 ділиться націло кожний з коефіцієнтів тричлена $f(x)$?

3. Знайдіть усі трійки додатних чисел a, b, c, що задовольняють умови:

$$ab\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)=bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)=ca\left(1-\frac{b^2}{(c+a)^2}\right).$$

4. У гострокутному різносторонньому трикутнику ABC проведено медіану AM. Її продовження перетинає описане коло w цього трикутника в точці P. Нехай AH_1 – висота ΔABC, H – точка перетину його висот. Промені MH та PH_1 перетинають коло w у точках K та T відповідно. Доведіть, що описане коло ΔKTH_1 дотикається до відрізка BC.

5. Задана смуга $1\times n$, $n\geq 4$, у кожну комірку якої записане натуральне число (не обов'язково усі числа різні). Після цього під кожним числом записується натуральне число, яке дорівнює кількості таким чисел у попередньому рядку (наприклад, якщо в верхньому рядку тричі зустрічалося число 10, то під кожним з цих чисел 10 у наступному рядку буде написане число 3). Після цього з новим рядком проводиться аналогічна процедура.

а) Доведіть, що після скінченної кількості кроків рядки не будуть змінюватись.

б) Яку найбільшу кількість разів можливо, щоб наступний рядок відрізнявся від попереднього при $n=2016$ та при довільному n?

17 січня 2016 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Подальша інформація про олімпіаду буде наведена на сайті
www.matholymp.com.ua

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2015-2016 рік

11 клас (ВР)

1. Порівняйте три числа: $A = 11$, $B = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{2015} 2016$ та $C = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{2016} 2015$.

2. Квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ з цілими коефіцієнтами для кожного цілого значення x ділиться націло на натуральне число 2017. Чи обов'язково на 2017 ділиться націло кожний з коефіцієнтів тричлена $f(x)$?

3. Знайдіть усі трійки додатних чисел a, b, c, що задовольняють умови:

$$ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) = ca\left(1 - \frac{b^2}{(c+a)^2}\right).$$

4. У гострокутному різносторонньому трикутнику ABC проведено медіану AM. Її продовження перетинає описане коло w цього трикутника в точці P. Нехай AH_1 – висота ΔABC, H – точка перетину його висот. Промені MH та PH_1 перетинають коло w у точках K та T відповідно. Доведіть, що описане коло ΔKTH_1 дотикається до відрізка BC.

5. Задана смуга $1 \times n$, $n \geq 4$, у кожну комірку якої записане натуральне число (не обов'язково усі числа різні). Після цього під кожним числом записується натуральне число, яке дорівнює кількості таким чисел у попередньому рядку (наприклад, якщо в верхньому рядку тричі зустрічалося число 10, то під кожним з цих чисел 10 у наступному рядку буде написане число 3). Після цього з новим рядком проводиться аналогічна процедура.

а) Доведіть, що після скінченної кількості кроків рядки не будуть змінюватись.

б) Яку найбільшу кількість разів можливо, щоб наступний рядок відрізнявся від попереднього при $n = 2016$ та при довільному n?

17 січня 2016 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Подальша інформація про олімпіаду буде наведена на сайті
www.matholymp.com.ua