Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2015-2016 рік

11 клас (ДР)

1. Порівняйте три числа: $A = 11$, $B = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{2015} 2016$ та $C = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{2016} 2015$.

2. Квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ з цілими коефіцієнтами для кожного цілого значення x ділиться націло на натуральне число 2017. Чи обов'язково на 2017 ділиться націло кожний з коефіцієнтів тричлена $f(x)$?

3. Знайдіть усі трійки додатних чисел a, b, c, що задовольняють умови:

$$ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) = ca\left(1 - \frac{b^2}{(c+a)^2}\right).$$

4. У трикутнику ABC проведена бісектриса AD, E – точка дотику вписаного кола до сторони BC, I – центр вписаного кола ΔABC. Точка A_1 на описаному колі ΔABC така, що $AA_1 \parallel BC$. Позначимо через T – другу точку перетину прямої EA_1 та описаного кола ΔAED. Доведіть, що $IT = IA$.

5. Для яких натуральних $n \geq 3$ можна за скінченну кількість кроків з набору чисел $1; 2; \ldots; n$ отримати набір з n однакових чисел, якщо за один крок можна вибирати два довільних числа та збільшити кожне з них на довільне однакове натуральне число?

17 січня 2016 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Подальша інформація про олімпіаду буде наведена на сайті
www.matholymp.com.ua

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2015-2016 рік

11 клас (ДР)

1. Порівняйте три числа: $A=11$, $B=\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{2015}2016$ та $C=\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_{2016}2015$.

2. Квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ з цілими коефіцієнтами для кожного цілого значення x ділиться націло на натуральне число 2017. Чи обов'язково на 2017 ділиться націло кожний з коефіцієнтів тричлена $f(x)$?

3. Знайдіть усі трійки додатних чисел a,b,c, що задовольняють умови:

$$ab\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)=bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)=ca\left(1-\frac{b^2}{(c+a)^2}\right).$$

4. У трикутнику ABC проведена бісектриса AD, E – точка дотику вписаного кола до сторони BC, I – центр вписаного кола ΔABC. Точка A_1 на описаному колі ΔABC така, що $AA_1 \parallel BC$. Позначимо через T – другу точку перетину прямої EA_1 та описаного кола ΔAED. Доведіть, що $IT=IA$.

5. Для яких натуральних $n\ge 3$ можна за скінченну кількість кроків з набору чисел $1; 2; \ldots; n$ отримати набір з n однакових чисел, якщо за один крок можна вибирати два довільних числа та збільшити кожне з них на довільне однакове натуральне число?

17 січня 2016 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Подальша інформація про олімпіаду буде наведена на сайті
www.matholymp.com.ua